Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 2 im Sommersemester 2021 (am 23.04.21)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	Verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
Vorlesung x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zu Vorlesung x.

Grundlegende Ergebnisse zur Theorie der linearen algebraischen Gruppen

12. Jordan-Zerlegung VI

12.10 Kriterium für halbeinfache und unipotente Elmente

Seien G eine lineare algebraische Gruppe und $g \in G$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) g ist halbeinfach (bzw unipotent).

(ii) Es gibt eine natürliche Zahl n und einen Isomorphismus $\phi: G \xrightarrow{\cong} G' \subseteq \mathbf{GL}_n$ von G mit einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$ mit $\phi(g)$ halbeinfach (bzw. unipotent).

(iii) Für jeden Isomorphismus $\phi: G \xrightarrow{\cong} G' \subseteq \mathbf{GL}_n$ von G mit einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$ ist $\phi(g)$ halbeinfach (bzw. unipotent).

Beweis. <u>(i) ⇒ (iii)</u>.
Ist g halbeinfach, so ist $g = g_s$, also

$$\begin{aligned}\phi(g) &= \phi(g_s)\\ &= \phi(g)_s \qquad \text{(nach 2.4.8 (ii))},\end{aligned}$$

d.h. $\phi(g)$ ist halbeinfach.
Ist g unipotent, so ist $g = g_u$, also

$$\begin{aligned}\phi(g) &= \phi(g_u)\\ &= \phi(g)_u \qquad \text{(nach 2.4.8 (ii))},\end{aligned}$$

d.h. $\phi(g)$ ist unipotent.

<u>(iii) ⇒ (ii)</u>.
Nach 2.3.7(i) gibt es eine natürliche Zahl n und einen Isomorphismus

$$\phi: G \xrightarrow{\cong} G' \subseteq \mathbf{GL}_n$$

von G mit einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$. Nach Voraussetzung (iii) ist dann $\phi(g)$ halbeinfach bzw. unipotent.

<u>(ii) ⇒ (i)</u>. Sei

$$g = g_s \cdot g_u$$

die Jordan-Zerlegung im Sinne 2.4.8 (i). Wir wenden den nach (ii) existierenden Isomorphismus an und erhalten

$$\phi(g) = \phi(g_s)\cdot\phi(g_u)$$

Nach 2.4.8 (ii) ist dies gerade die Jordan-Zerlgung von $\phi(g)$. Nach Wahl von ϕ ist $\phi(g)$ halbeinfach (bzw. unipotent).

Ist $\phi(g)$ halbeinfach, so gilt $\phi(g) = \phi(g_s)$, also $\phi(g_u) = e = \phi(e)$. Weil ϕ ein Isomorphismus ist, folgt $g_u = e$, also $g = g_s$, d.h. g ist halbeinfach.

Ist $\phi(g)$ unipotent, so gilt $\phi(g) = \phi(g_u)$, also $\phi(g_s) = e = \phi(e)$. Weil ϕ ein Isomorphismus ist, folgt $g_s = e$, also $g = g_u$, d.h. g ist unipotent.

QED.

13 Unipotente, nilpotente und auflösbare Gruppe

13.1 Definition: Unipotente algebraische Gruppen

Eine lineare algebraische Gruppe G heißt unipotent, wenn alle ihre Elemente unipotent sind.

Beispiel

Die lineare algebraische Gruppe

$$\mathbf{U}_n = \{ (x_{ij}) \in \mathbf{T}_n \mid x_{ii} = 1 \text{ für } i = 1,...,n \}$$

der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen von 2.1.4 Beispiel 4 (d) ist unipotent.

Bemerkung

Wir zeigen jetzt umgekehrt, daß jede Unipotente lineare algebraische Gruppe isomorph ist zu einer Untergruppe einer $\mathbf{U}_n$.

13.2 Einbettung der unipotenten Gruppen $\mathbf{U}_n$

Sei G eine Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$, welche aus unipotenten Matrizen besteht. Dann gibt es ein $x \in \mathbf{GL}_n$ mit $xGx^{-1} \subseteq \mathbf{U}_n$.

Beweis.

1. Schritt. Reduktion des Beweises auf den Beweis der folgenden Aussage.

Für jeden endlich-dimensionalen k-Vektorraum V und jede Untergruppe

$$G \subseteq GL(V),$$

welche aus unipotenten Endomorphismen besteht, gibt eine vollständige[1] Fahne von k-linearen Unterräumen,

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n = V,$$

welche stabil sind gegenüber allen Endomorphismen aus G, (1)

$$a(V_i) \subseteq V_i \text{ für alle i und alle } a \in G.$$

Ist nämlich $V = k^n$ und $v_1,...,v_n \in V$ eine mit der Fahne verträgliche Basis, d.h.

$$V_i = k\cdot v_1 + ... + k\cdot v_i \text{ für } i = 0,...,n$$

[1] Es lassen sich keine weiteren Räume in die Fahne einfügen, ohne daß diese aufhört echt aufsteigend zu sein, d.h. die Dimension benachbarter Räume unterscheidet sich um 1, d.h. $\dim_k V_i = i$ für alle i.

und $x: V \longrightarrow V$ der k-lineare Automorphimus, welcher die Basis der v_i in die Basis der Standard-Einheitsvektoren überführt,

$$x \bullet v_i = e_i,$$

so gilt für $a \in G$:

$$\begin{aligned} xax^{-1}e_i &= xav_i && \text{(nach Definition von x)} \\ &=^{2} x \bullet \sum_{j=1}^{i} c_j \bullet v_j && \text{mit } c_j \in k \text{ für jedes } j \\ &= \sum_{j=1}^{i} c_j \bullet e_j && \text{(nach Definition von x)} \end{aligned}$$

Identifizieren wir die k-lineare Abbildung xax^{-1} mit der zugehörigen Matrix bezüglich der Basis der e_i, so ist $xax^{-1}e_i$ gerade die i-te Spalte der Matrix xax^{-1}. Wir haben also gezeigt, höchstens die ersten i Koordinaten der i-ten Spalte von xax^{-1} sind ungleich 0. Da dies für alle i gilt, ist xax^{-1} eine obere Dreiecksmatrix. Dies gilt für alle $a \in G$, d.h. xGx^{-1} besteht aus oberen Dreiecksmatrizen,

$$xGx^{-1} \subseteq \mathbf{T}_n.$$

Nun sind nach Voraussetzung alle Elemente $a \in G$ unipotent, d.h. a-1 ist nilpotent. Dann ist aber auch

$$xax^{-1} - 1 = x \bullet (a-1) \bullet x^{-1} \tag{2}$$

nilpotent. Die Einträge auf der Hauptdiagonalen der nilpotenten oberen Dreieckmatrix (2) müssen somit sämtlich gleich 0 sein. Die von xax^{-1} sind also alle gleich 1, d.h. es ist

$$xGx^{-1} \subseteq U_n.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es also, Aussage (1) zu beweisen.
2. Schritt. Beweis von Aussage (1).
Wir führen den Beweis durch Induktion nach $n := \dim V$.
Induktionsanfang: n = 1.
Im Fall $\dim V = 1$ ist

$$0 \subset V$$

die einzige vollständige Fahne von V. Da die Räume 0 und V beide **GL**(V)-stabil sind, sind sie stabil bei jeder Untergruppe von GL(V), also auch bei G.
Induktionsschritt: n > 1.
Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall. Es gibt einen G-stabilen Unterraum $W \subseteq V$, der von 0 und V verschieden ist.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann eine vollständige Fahne

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_d = W$$

aus G-stabilen Unterräumen V_i für $i = 0,\ldots,d$. Jedes Element $a \in G$ induziert einen k-linearen Automorphismus auf dem Faktorraum $\overline{V} := V/W$. Wegen $W \neq 0$ gilt

---

[2] wegen $a(V_i) \subseteq V_i$ und $v_i \in V_i$.

$$n\text{-}d = \dim \overline{V} < \dim V.$$

Weil für jedes $a \in G$ der k-lineare Endomorphismus $a-1$ von V nilpontent ist, ist auch der auf $\overline{V}$ induzierte Endomorphismus nilpotent. Die Gruppe G operiert also auf $\overline{V}$ durch unipotente Automorphismen. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine vollständige Fahne

$$0 = \overline{V}_0 \subset \overline{V}_1 \subset \ldots \subset \overline{V}_{n-d} = \overline{V}$$

von G-stabilen k-linearen Unterräumen von $\overline{V}$. Sei $\rho: V \longrightarrow \overline{V}$ die natüliche Abbildung auf den Faktorraum. Wir setzen

$$V_{d+i} := \rho^{-1}(\overline{V}_i) \text{ für } i = 0, \ldots , n\text{-}d.$$

Man beachte für $i = 0$ erhalten wir $\rho^{-1}(\overline{V}_0) = \rho^{-1}(0) = \mathrm{Ker}(\rho) = W = V_d$, d.h. die neue Definition von V_d stimmt mit der alten überein. Außerdem ist auf Grund der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow V \longrightarrow \overline{V} \longrightarrow 0$$

auch für $i = 0, \ldots, n\text{-}d$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow V_{d+i} \longrightarrow \overline{V}_i \longrightarrow 0$$

exakt, d.h. es ist

$$\dim V_{d+i} = \dim W + \dim \overline{V}_i = d + i.$$

Wir erhalten somit eine vollständige Fahne

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V.$$

von k-linearen Unterräumen. Für $i = 1,\ldots, d$ ist V_i nach Wahl G-stabil. Wir haben zu zeigen, dies ist auch für $i = d+1, \ldots , n$ der Fall. Nach Definition des k-linearen Automorphismus $\overline{a}$, der durch $a \in G$ auf $\overline{V}$ induziert wird, ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{a} & V \\ \rho\downarrow & & \downarrow\rho \\ \overline{V} & \xrightarrow{\overline{a}} & \overline{V} \end{array}$$

kommutativ. Für $x \in V_{d+i} = \rho^{-1}(\overline{V}_i)$ gilt

$$\begin{array}{lll} \rho(a(x)) = \overline{a}(\rho(x)) & \in \overline{a}(\overline{V}_i) & \text{(nach Wahl von x)} \\ & \subseteq \overline{V}_i & (\overline{V}_i \text{ ist } \overline{a}\text{-stabil}) \end{array}$$

also

$$a(x) \in \rho^{-1}(\overline{V}_i)) = V_{d+i}$$

Wir haben gezeigt $a(V_{d+i}) \subseteq V_{d+i}$ für für jedes $a \in G$, d.h. die V_{d+i} sind ebenfalls G-stabil.

2. Fall. Es gibt keinen G-stabilen k-linearen Unterraum der echt zwischen 0 und V liegt. Sei

$$A := \sum_{\sigma\in G} k\bullet\sigma \subseteq \mathrm{End}_k(V)$$

die von den Elementen von G erzeugte k-Teilalgebra von $End_k(V)$. Die natürliche Modulstruktur von V über $End_k(V)$,

$$End_k(V) \times V \longrightarrow V, (f, v) \mapsto f(v),$$

definiert über die natürliche Einbettung $A \hookrightarrow End_k(V)$ auf V die Struktur eines A-Moduls. Auf Grund der Voraussetzung des zweiten Falls ist V über A ein einfacher A-Modul. Weil k algebraisch abgeschlossen ist, gilt nach dem Satz von Burnside A.3.3.3

$$A = End_k(V). \tag{3}$$

Nach Voraussetzung besteht G aus unipotenten Endomorphismen, d.h. für jedes $a \in G$ ist a-1 nilpotent. Es gibt also eine vollständige Fahne[3]

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n = V \tag{4}$$

von V mit $(a-1)(V_i) \subseteq V_{i-1}$ für i = 1,..., n, d.h. die Matrix von a-1 bezüglich einer mit der Fahne verträglichen Basis ist eine obere Dreiecksmatrix, auf deren Hauptdialgonalen Nullen stehen. Insbesondere erhalten wir für die Spur

$$Tr(a) = Tr(1) + Tr(a-1) = n + 0 = n = \dim V.$$

Es gilt also

$$Tr(a) = n \text{ für jedes } a \in G.$$

Man beachte, die Fahne (4) hängt von der Wahl des Elements $a \in G$ ab. Die Folgerung, daß die Spur von a gleich n ist, gilt für alle $a \in G$ gleichermaßen.
Weil die Spur eines Endomorphismus eine lineare Funktion des Endomorphismus ist, folgt für je zwei $a, b \in G$

$$Tr((1-a)b) = Tr(b - ab) = Tr(b) - Tr(ab) = n - n = 0.$$

Aus demselben Grund bleibt diese Identität richtig wenn wir b durch eine beliebige Linearkombination von Elementen aus G ersetzen (mit Koeffizienten aus k). Wegen (3) gilt damit

$$Tr((1-a)b) = 0 \text{ für beliebiges } a \in G \text{ und beliebiges } b \in A = End_k(V).$$

Wir fixieren irgendeine Basis $e_1,...,e_n \in V$ von V und identifizieren die k-linearen Endomorphismen von V mit den zugehörigen Matrizen. Für jede n×n-Matrix A können wir deren Spur mit Hilfe der Matrizen-Multiplikation ausdrücken:

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} e_i^T \cdot A \cdot e_i.$$

Ist A die Matrix von $(1-a)\cdot b$, so erhalten wir

$$0 = Tr((1-a)b) = \sum_{i=1}^{n} e_i^T \cdot (1-a) \cdot b \cdot e_i \text{ für } a \in G \text{ und } b \in End_k(V).$$

Für vorgegebenes $a \in G$ und vorgegebene i und j können wir b derart wählen, daß gilt

---

[3] Weil f:= a-1 nilpotent ist, ist für jeden f-stabilen Unterraum W das Bild f(W) ein stabiler Unterraum echt kleinerer Dimension. Ist $\dim_k f(W) \le \dim W_k$-2 so kann man einen Unterraum W' wählen der zwischen f(W) und W liegt,

$$f(W) \subset W' \subset W,$$

mit $\dim_k W' = \dim_k W - 1$. Dieser ist automatisch invariant, denn wegen $W' \subset W$ gilt

$$f(W') \subseteq f(W) \subset W'.$$

$$b \bullet e_i = e_j \text{ und } b \bullet e_\nu = 0 \text{ für jedes von i verschiedene } \nu.$$

Damit gilt

$$0 = e_i^T \bullet (1-a) \bullet e_j \text{ für } a \in G,$$

und zwar für beliebige i und j (da wir für jedes Paar (i, j) ein passendes b wählen können). Da bedeutet aber, der Eintrag der Matrix 1-a in der Position (i,j) ist gleich 0 - für alle i und alle j. Damit ist 1-a = 0, also a = 1.

Wir haben gezeigt,

$$G = \{1\}.$$

Dann ist aber jeder k-lineare Unterraum von V ein G-stabiler Unterraum. Da 0 und V die einzigen G-stabilen Unterräume sein sollen, folgt $\dim_k V = 1$. Wir sind in der Situation des Induktionsanfangs, für welche die Behauptung trivialerweise gilt.

QED.

13.3 Nilpotente und auflösbare Gruppen

Sei G eine Gruppe. Für Elemente x, y ∈ G bezeichnen wir wie bisher mit

$$(x,y) := xyx^{-1}y^{-1}$$

den <u>Kommutator</u> von x und y. Die Gruppe G heißt <u>nilpotent</u>, wenn es eine natürliche Zahl n gibt mit der Eigenschaft, daß für jeweils n Elemente $x_1,...,x_n \in G$ alle Kommutatoren der Ordnung n-1,

$$(x_1,(...(x_{n-1}, x_n)...)) = e$$

gleich dem neutralen Element e der Gruppe G sind.Die Gruppe G heißt <u>auflösbar</u>, wenn es eine endliche Folge

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_r = \{1\}$$

von Untergruppen von G gibt mit folgenden Eigenschaften,

1. G_i ist Normalteiler von G_{i-1} für i = 1,...,r.
2. G_{i-1}/G_i ist eine abelsche Gruppe für i = 1,...,r.

Seien A und B zwei Untergruppen der Gruppe G. Dann heißt die von den Kommutatoren

$$(a,b) := aba^{-1}b^{-1} \text{ mit } a \in A \text{ und } b \in B$$

erzeugte Untergruppe <u>Kommutator</u> von A und B und wird mit

$$(A,B)$$

bezeichnet. Weiter definieren wir die <u>iterierten Kommutatoren</u> $G^{(i)}$ der Gruppe G für i = 0, 1, 2, ... induktiv wie folgt.

$$G^{(0)} := G$$
$$G^{(1)} := (G, G)$$
$$G^{(i+1)} := (G^{(i)}, G^{(i)}).$$

Schließlich verwenden wir noch die folgenden Bezeichnungen.

$$G^{[0]} := G = G^{(0)}$$
$$G^{[1]} := (G, G) = G^{(1)}$$
$$G^{[i+1]} := (G, G^{[i]})$$

Wir wollen diese Untergruppen auch <u>potenzierte Kommutatoren</u> nennen.

Bemerkungen

(i) Das Bild eines Kommutators zweier Elemente bei einem Gruppen-Homomorphismus und bei einem Anti-Homomorphismus ist ein Kommutator. Insbesondere ist das Inverse eines Kommutators ein Kommutator.

(ii) Der Kommutator (G, G) einer Gruppe G mit sich selbst ist ein Normalteiler. Es ist der kleinste Normalteiler N von G, für welchen die Faktorgruppe G/N abelsch ist. Genauer:
1. (G, G) ist ein Normalteiler von G mit G/(G, G) abelsch.
2. Für jeden Normalteiler N von G mit G/N abelsch gilt $(G,G) \subseteq N$.

(iii) Für je zwei Elemente a, b einer Gruppe G gilt
$$(a,b)^{-1} = (b, a).$$
Sind A, B zwei Untergruppen einer Gruppe G, so gilt
$$(A, B) = (B,A).$$
(iv) Eine Gruppe G ist genau dann auflösbar, wenn es eine natürliche Zahl n gibt mit $G^{(n)} = \{1\}$.

(v) Eine Gruppe G ist genau dann nilpotent, wenn es eine natürliche Zahl n gibt mit $G^{[n]} = \{1\}$.

(vi) Für jede natürliche Zahl n ist $G^{[n]}$ die von den Kommutatoren der Ordnung n von G erzeugte Untergruppe.

(vii) Es gilt $G^{[n]} \supseteq G^{(n)}$ für jedes n. Insbesondere sind nilpotente Gruppen auflösbar

Beweis. Zu (i) und zum ersten Teil von (iii). Seien $h: G \longrightarrow G'$ ein Gruppen-Homomorphismus und $x,y\in G$. Dann ist
$$h((x,y)) = h(xyx^{-1}y^{-1}) = h(x)\bullet h(y)\bullet h(x)^{-1}\bullet h(y) = (h(x), h(y))$$
ein Kommutator in G'.

Sei jetzt $h: G \longrightarrow G'$ ein Anti-Homomorphismus (d.h. $h(ab) = h(b)h(a)$, also $h(1) = 1$ und $h(a^{-1}) = h(a)^{-1}$). Dann gilt
$$h((x,y)) = h(xyx^{-1}y^{-1}) = h(y^{-1})h(x^{-1})h(x)h(y) = h(y^{-1})h(x^{-1})h(x^{-1})^{-1}h(y^{-1})^{-1}$$
$$= (h(y^{-1}), h(x^{-1})),$$
d.h. wir erhalten wieder einen Kommutator.

Ist h speziell die Abbildung $G \longrightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$, so erhalten wir
$$(x,y)^{-1} = (y,x),$$
d.h. das Inverse eines Kommutators ist ein Kommutator. Außerdem ist damit auch der erste Teil von Bemerkung (iii) bewiesen.

Zu (ii). Die Gruppe (G, G) besteht aus allen endlichen Produkten von Kommutatoren von Elementen von G. Man beachte, auf Grund der letzten Aussage von (i) bilden diese Produkte tatsächlich eine Untergruppe.

Ebenfalls nach (i) geht ein Kommutator bei einem inneren Automorphismus der Gruppe in einen Kommutator über. Deshalb gilt
$$x\bullet(G,G)\bullet x^{-1} \subseteq (G,G)$$
für jedes $x \in G$, d.h. (G,G) ist ein Normalteiler von G.

Nach Definition gilt für beliebige $x, y \in G$:
$$xy\bullet(yx)^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} \in (G,G)$$
also
$$xy \in (G,G)yx$$
$$= yx\bullet(G,G) \qquad \text{(weil (G,G) ein Normalteiler ist)}$$
also
$$xy \equiv yx \mod (G,G),$$
d.h. G/(G,G) ist eine abelsche Gruppe.

Sei jetzt $N \subseteq G$ ein Normalteiler von G, für welchen G/N abelsch ist. Wir bezeichnen mit

$$\rho: G \longrightarrow G/N,\ g \mapsto g\bullet N,$$

den natürlichen Homomorphismus auf die Faktorgruppe. Dann gilt für beliebige $x,y \in G$:

$$\begin{aligned} xyx^{-1}y^{-1}\bullet N &= \rho(xyx^{-1}y^{-1}) && \text{(nach Definition von } \rho\text{)} \\ &= \rho(x)\bullet \rho(y)\bullet \rho(x)^{-1}\bullet \rho(y)^{-1} && \text{(weil } \rho \text{ ein Homomorphismus ist)} \\ &= \rho(e) && \text{(weil G/N abelsch ist)} \\ &= e\bullet N && \text{(nach Definition von } \rho\text{)} \\ &= N \end{aligned}$$

also

$$(x,y) \in N.$$

Da dies für beliebige $x,y \in G$ gilt, folgt $(G, G) \subseteq N$. Damit ist (G,G) der kleinste Normalteiler von G mit abelscher Faktorgruppe.
Zu (iii). Der erste Teil der Aussage,

$$(a,b)^{-1} = (b,a) \tag{1}$$

wurde bereits zusammen mit Bemerkung (i) bewiesen. Beweisen wir den zweiten Teil. Nach Definition ist

$$(A, B) = < (x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B >$$

die von den Elementen der Gestalt (x,y) mit $x \in A$ und $y \in B$ erzeugte Untergruppe, also die Menge aller endlichen Produkte von Elementen der Gestalt

$$(x, y) \text{ und } (x, y)^{-1} \text{ mit } x \in A \text{ und } y \in B.$$

Wegen (1) ist (A, B) gleich der Menge aller endlichen Produkte von Elementen der Gestalt

$$(x, y) \text{ und } (y, x) \text{ mit } x \in A \text{ und } y \in B.$$

Diese letzte Beschreibung ist symmetrisch in A und B, d.h. es gilt

$$(A, B) = (B, A).$$

Zu (iv). Sei G eine auflösbare Gruppe und

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_r = \{1\}$$

eine Folge von Untergruppen wie in der Definition der Auflösbarkeit gefordert. Zeigen wir durch Induktion nach j, daß dann

$$(G_{i-1})^{(j+1)} \subseteq (G_i)^{(j)} \tag{2}$$

gilt für jedes i und jedes j.
Induktionsanfang: j = 0.
Es gilt

$$(G_{i-1})^{(1)} = (G_{i-1}, G_{i-1}) \subseteq G_i$$

wobei die rechte Inklusion besteht, weil G_{i-1}/G_i nach Voraussetzung abelsch ist (und nach (ii)).
Induktionsschritt: j > 0.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$(G_{i-1})^{(j)} \subseteq (G_i)^{(j-1)} \tag{3}$$

also

$$(G_{i-1})^{(j+1)} = ((G_{i-1})^{(j)}, (G_{i-1})^{(j)}) \quad \text{(nach Definition des iterierten Kommutators)}$$

$\subseteq ((G_i)^{(j-1)}, (G_i)^{(j-1)})$ (nach (3))

$= (G_i)^{(j)}$ (nach Definition des iterierten Kommutators)

Damit ist (2) bewiesen. Es folgt

$$G^{(j)} = (G_0)^{(j)} \subseteq (G_1)^{(j-1)} \subseteq ... \subseteq (G_j)^{(0)} = G_j \text{ für jedes j.}$$

Für j = r ist damit

$$G^{(r)} = G_r = \{1\}.$$

Die Bedingung ist also notwendig.

Sei jetzt umgekehrt $G^{(n)} = (1)$ für irgendeine natürliche Zahl n. Wir betrachten die Folge von Untergruppen

$$G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq ... \supseteq G^{(n-1)} \supseteq G^{(n)} = \{1\}.$$

Wegen $G^{(i+1)} := (G^{(i)}, G^{(i)})$ ist $G^{(i+1)}$ Normalteiler in $G^{(i)}$, und die Faktorgruppe

$$G^{(i)}/ G^{(i+1)}$$

ist nach (ii) abelsch. Damit ist G auflösbar. Die Bedingung ist hinreichend.

Zu (v). Sei G nilpotent, d.h. es gebe ein n derart, daß alle Kommutatoren

$$(x_1,(...(x_{n-1}, x_n)...))$$

der Ordnung n-1 von Elementen aus G gleich e sind. Nach Definition wird $G^{[i]}$ von Kommutatoren der Ordnung i erzeugt. Im Fall i = n sind diese Erzeuger alle gleich e. Es ist also

$$G^{[n-1]} = \{e\}.$$

Die Bedingung ist notwendig.

Sei umgekehrt

$$G^{[n]} = \{e\}$$

für eine natürliche Zahl n. Wir haben zu zeigen, G ist nilpotent. Dazu reicht es für i = 1, 2, 3, ... zu zeigen, jeder Kommutator der Ordnung i liegt in $G^{[i]}$ (denn dann sind alle Kommutatoren der Ordnung n gleich e). Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Ordnung i.

Induktionsanfang: i = 1.

Jeder Kommutator der Ordnung 1 hat die Gestalt (x, y) mit $x, y \in G$. Es gilt

$$(x, y) \in (G, G) = G^{[1]}.$$

Induktionsschritt: i > 1.

Jeder Kommutator der Ordnung i hat die Gestalt

$$(x, y) \text{ oder } (y, x)$$

mit $x \in G$ und einem Kommutator y der Ordnung i-1. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$y \in G^{[i-1]},$$

also

$$(x,y) \in (G, G^{[i-1]}) = G^{[i]}.$$

Weil $G^{[i]}$ eine Gruppe ist, gilt dann aber auch

$$(y, x) = (x, y)^{-1} \in G^{[i]}.$$

Wir haben gezeigt, die Bedingung ist auch hinreichend.

Zu (vi). Die Aussage ergibt sich aus dem Beweis von (v).

Zu (vii). Es reicht zu zeigen, es gilt

$$G^{[n]} \supseteq G^{(n)}$$

für jedes n. Die verbleibende Aussage ergibt sich dann aus (iv) und (v). Wir beweisen die Inklusion durch Induktion nach n.
<u>Induktionsanfang</u>: n = 0 und n = 1.
Nach Definition gilt

$$G^{[0]} = G = G^{(0)}$$

und

$$G^{[1]} = (G, G) = G^{(1)}.$$

<u>Induktionsschritt</u>: n > 1.
Es gilt

$$\begin{aligned} G^{[n]} &= (G, G^{[n-1]}) && \text{(nach Definition von } G^{[n]}\text{)} \\ &\supseteq (G, G^{(n-1)}) && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &\supseteq (G^{(n-1)}, G^{(n-1)}) && \text{(wegen } G \supseteq G^{(n-1)}\text{)} \\ &= G^{(n)} && \text{(nach Definition von } G^{(n)}\text{)} \end{aligned}$$

QED.

Index

Inhalt